מטלת מנחה 14

## שאלה 1

### סעיף א

| הפונקציה | האם על? | האם חח"ע? | האם הופכית? |
| --- | --- | --- | --- |
| \begin{bmatrix}a&b\\1&1\end{bmatrix} | לא. האיבר 2 בטווח אינו שייך לתמונת A. | לא. ל-1 בטווח יותר ממקור אחד | לא. לאיבר 1 אין מקור אחד ויחיד. |
| \begin{bmatrix}a&b\\1&2\end{bmatrix} | לא. האיבר 3 בטווח אינו שייך לתמונת A. | כן | לא. לאיבר 1 אין מקור אחד ויחיד. |
| \begin{bmatrix}a&b\\1&3\end{bmatrix} | לא. האיבר 2 בטווח אינו שייך לתמונת A. | כן | לא. לאיבר 1 אין מקור אחד ויחיד. |
| \begin{bmatrix}a&b\\2&1\end{bmatrix} | לא. האיבר 3 בטווח אינו שייך לתמונת A. | כן | לא. לאיבר 1 אין מקור אחד ויחיד. |
| \begin{bmatrix}a&b\\2&2\end{bmatrix} | לא. האיבר 1 בטווח אינו שייך לתמונת A. | לא. ל-2 בטווח יותר ממקור אחד. | לא. לאיבר 1 אין מקור אחד ויחיד. |
| \begin{bmatrix}a&b\\2&3\end{bmatrix} | לא. האיבר 1 בטווח אינו שייך לתמונת A. | כן | לא. לאיבר 1 אין מקור אחד ויחיד. |
| \begin{bmatrix}a&b\\3&1\end{bmatrix} | לא. האיבר 2 בטווח אינו שייך לתמונת A. | כן | לא. לאיבר 1 אין מקור אחד ויחיד. |
| \begin{bmatrix}a&b\\3&2\end{bmatrix} | לא. האיבר 1 בטווח אינו שייך לתמונת A. | כן | לא. לאיבר 1 אין מקור אחד ויחיד. |
| \begin{bmatrix}a&b\\3&3\end{bmatrix} | לא. האיבר 1 בטווח אינו שייך לתמונת A. | לא. ל-3 בטווח יותר ממקור אחד. | לא. לאיבר 1 אין מקור אחד ויחיד. |

### סעיף ב

| הפונקציה | האם על? | האם חח"ע? | האם הפיכה? |
| --- | --- | --- | --- |
| \begin{bmatrix}1&2&3\\a&a&a\end{bmatrix} | לא. לאיבר b בטווח אין מקור. | לא. ל-1 ו-2 אותה תמונה. | לא. לאיבר a בטווח אין מקור אחד ויחיד. |
| \begin{bmatrix}1&2&3\\a&a&b\end{bmatrix} | כן | לא. ל-1 ו-2 אותה תמונה. | לא. לאיבר a בטווח אין מקור אחד ויחיד. |
| \begin{bmatrix}1&2&3\\a&b&a\end{bmatrix} | כן | לא. ל1 ו-3 אותה תמונה. | לא. לאיבר a בטווח אין מקור אחד ויחיד. |
| \begin{bmatrix}1&2&3\\b&a&a\end{bmatrix} | כן | לא. ל2 ו-3 אותה תמונה. | לא. לאיבר a בטווח אין מקור אחד ויחיד. |
| \begin{bmatrix}1&2&3\\a&b&b\end{bmatrix} | כן | לא. ל 2 ו-3 אותה תמונה. | לא. לאיבר b בטווח אין מקור אחד ויחיד. |
| \begin{bmatrix}1&2&3\\b&a&b\end{bmatrix} | כן | לא. ל1 ו-3 אותה תמונה. | לא. לאיבר b בטווח אין מקור אחד ויחיד. |
| \begin{bmatrix}1&2&3\\b&b&a\end{bmatrix} | כן | לא. ל1 ו-2 אותה תמונה. | לא. לאיבר b בטווח אין מקור אחד ויחיד. |
| \begin{bmatrix}1&2&3\\b&b&b\end{bmatrix} | לא. לאיבר a בטווח אין מקור. | לא. ל-1 ו-2 אותה תמונה. | לא. לאיבר a בטווח אין מקור אחד ויחיד. |

### סעיף ג

טענה: כאשר , : הפיכה.

הוכחה:

לפי ההנחה וגם

לכן לאיברים בתמונת פונקציית ההרכבה (שהם כל האיברים) קיים מקור על.

באופן דומה לאיברים בתמונת פונקציית ההתאמה קיימים מקורות יחידים (כל איבר הוא מקור של עצמו)

חח"ע( חח"ע וגם על) הפיכה.

## שאלה 2

נתונות הפונקציה , הקבוצות :

### סעיף א

טענה: אם , אינה בהכרח חח"ע

הוכחה:

כאשר ולכל : ,

וכאשר ,

:

האיבר הוא מספר טבעי ולכן

האיבר הוא מספר טבעי ולכן

האיבר הוא מספר טבעי ולכן

ולכן לכל : .

האיבר הוא מספר טבעי ולכן

האיבר הוא מספר טבעי ולכן

האיבר הוא מספר טבעי ולכן

ולכן לכל :

:

האיבר לא נמצא בקיים :

או

:

לפי הגדרת הפונקציה

באופן דומה

האיבר לא נמצא ב קיים :

( או ).

לא חח"ע:

קיימים , : לא חח"ע

### סעיף ב

טענה: אם חח"ע, אז

טענת עזר: לה"כ אם ( חח"ע וגם ) אז

הוכחת טענת העזר:

לכל : קיים כלשהו כך ש .

חח"ע.

הוכחה:

נניח בשלילה ( וגם ).

לכן לפי טענת העזר ( וגם ) אבל !

### 

### סעיף ג

כאשר:

כך שלכל מתקיים ,

וכאשר: ,

טענת עזר:

הוכחה:

האיבר גם שייך ל-

האיבר גם שייך ל-

האיבר גם שייך ל-

לכן כל איבר בD שייך גם לC.

טענת עזר:

הוכחה:

האיבר גם שייך ל-

האיבר גם שייך ל-

האיבר גם שייך ל-

האיבר גם שייך ל-

לכן כל איבר בC שייך ל.

טענה:

הוכחה: לפי טענות העזר וגם

מטרנזיטיביות יחס ההכלה( וגם )

טענה:

הוכחה:

האיבר לא שייך ל

לכן ( או ).

טענה: חח"ע

הוכחה: יהיו ונניח

( או )

אבל ולכן בהכרח .

טענה:

הוכחה:

לפי ההנחה

ובאופן דומה

ולכן .

## שאלה 3

יהיו פונקציות מ ל כך שלכל :

| אם זוגי |  |
| --- | --- |
| אם א"ז |

טענה: חח"ע

הפרכה:

לאיברים אותה תמונה:

לכן קיימים , : לא חח"ע

טענה: חח"ע

הוכחה: יהיו ונניח

לכן

לכן

ולכן .

טענת עזר: לכל : ( וגם א"ז)

הוכחת טענת העזר: יהי .

:

מחלקיות בקבוצת השלמים

מסגירות כפל שלמים

מסגירות חיסור שלמים .

בנוסף מתקיים ע"פ הגדרת טבעיים

לכן ( וגם )

א"ז:

נניח כי זוגי

לכן א"ז!

טענה: היא על

הוכחה: יהי איבר בטווח הפונקציה.

אם א"ז:

א"ז זוגי

מסגירות חיבור טבעיים

לכן ולכן קיים מקור של .

ואם זוגי:

לפי טענת העזר וגם א"ז

לכן ולכן קיים מקור של .

לכן קיים : על.

טענה: היא על

הפרכה: לאיבר בטווח הפונקציה לא קיים אף איבר שהוא מקור שלו:

נניח בשלילה כי קיים :

לכן אבל !

לכן קיים איבר בטווח הפונקציה ללא מקור לא על.

טענה: היא פונקציית הזהות על .

הוכחה: יהי איבר כלשהו בתחום.

לפי ההנחה .

א"ז לפי טענת העזר,

לכן .

ולכן היא פונקציית הזהות על .

טענה: היא פונקציית הזהות על .

הפרכה: לאיבר לא מתקיים :

2 זוגי, לכן לפי ההנחה

כמו כן

לכן קיים : אינה פונקציית הזהות על .

## שאלה 4

יהיו

### סעיף א

טענה: אם ( על וגם ) אז

הוכחה: נניח בשלילה

תחומן וטווחן שווה (לA), לכן בהכרח קיים :

עלקיים :

אבל לפי ההנחה !

### סעיף ב

בחרתי להשתמש בפונקציות כך שלכל :

טענה: חח"ע

הוכחה: יהיו ונניח

לכן .

טענת עזר: לכל :

הוכחת טענת העזר:

טענה:

הוכחה:

גם תחום הפונקציות וגם טווח הפונקציות שווה (ל), לכן כל מה שעליי להוכיח הוא שוויון ה"קשר" בין התחום לטווח:

יהי

לפי הגדרת הפונקציה

באופן דומה

כמו כן

לפי טענת העזר

ולכן

((תחום הפונקציות שווה וגם טווח הפונקציות שווה) וגם )

טענה:

הוכחה: נניח בשלילה

לכן אבל !